7. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos. Hallar sus áreas.

a) (0, 9), (—4, —1), (3, 2); *c*) (3, —2), (—2, 3), (0, 4);
b) (10, 5), (3, 2), (6, —5); *d*) (—2, 8), (—6, 1), (0, 4).
Sol. Areas: *a*) 29, *b*) 29, *c*) 7,5, *d*) 15 unidades de superficie.

8. Demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo:

a) (—1, —2), (0, 1), (—3, 2), (—4, —1); *c*) (2, 4), (6, 2), (8, 6), (4, 8).
b) (—1, —5), (2, 1), (1, 5), (—2, —1);

9. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos:

a) (3, 3), (6, 2), (8, —2); *b*) (4, 3), (2, 7), (—3, —8); *c*) (2, 3), (4, —1), (5, 2).
Sol. *a*) (3, —2), *b*) (—5, 1), *c*) (3, 1).

10. Demostrar, mediante la fórmula de la distancia, que los puntos siguientes son colineales:

a) (0, 4), (3, —2), (—2, 8); *c*) (1, 2), (—3, 10), (4, —4);
b) (—2, 3), (—6, 1), (—10, —1); *d*) (1, 3), (—2, —3), (3, 7).

11. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera $P(x, y)$ a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices. Supóngase que las coordenadas de los vértices son (0, 0), (0, *b*), (*a*, *b*) y (*a*, 0).

12. Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto (—3, 6).
Sol. (3, —2), (3, 14).

13. Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento que determinan $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \dfrac{P_1P}{PP_2}$.

a) $P_1(4, -3)$, $P_2(1, 4)$, $r = \dfrac{2}{1}$. *d*) $P_1(0, 3)$, $P_2(7, 4)$, $r = -\dfrac{2}{7}$.

b) $P_1(5, 3)$, $P_2(-3, -3)$, $r = \dfrac{1}{3}$. *e*) $P_1(-5, 2)$, $P_2(1, 4)$, $r = -\dfrac{5}{3}$.

c) $P_1(-2, 3)$, $P_2(3, -2)$, $r = \dfrac{2}{5}$. *f*) $P_1(2, -5)$, $P_2(6, 3)$, $r = \dfrac{3}{4}$.

Sol. *a*) $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$, *c*) $\left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$, *d*) $\left(-\dfrac{14}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$, *e*) (10, 7), *f*) $\left(\dfrac{26}{7}, -\dfrac{11}{7}\right)$.

14. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices son:

a) (5, 7), (1, —3), (—5, 1); *c*) (3, 6), (—5, 2), (7, —6); *e*) (—3, 1), (2, 4), (6, —2).
b) (2, —1), (6, 7), (—4, —3); *d*) (7, 4), (3, —6), (—5, 2);

Sol. *a*) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$, *c*) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, *d*) $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, *e*) $\left(\dfrac{5}{3}, 1\right)$.

15 Sabiendo que el punto (9, 2) divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = 3/7$, hallar las coordenadas de P_2.
Sol. (16, —12).

16. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son (—2, 1), (5, 2) y (2, —3).
Sol. (1, 6), (9, —2), (—5, —4).

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son (3, 2), (—1, —2) y (5, —4).
Sol. (—3, 4), (9, 0), (1, —8).

18. Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(7, -6)$ y $D(-5, -4)$ forman otro cuadrilátero cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.

19. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de dos lados de los triángulos del Problema 14 son paralelas al tercer lado e iguales a su mitad.

20. Dado el cuadrilátero $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$ y $D(2, -8)$, demostrar que:

a) La recta que une los puntos medios de AD y BC pasa por el punto medio del segmento que une los puntos medios de AB y CD.
b) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero forman un paralelogramo.

21. El segmento que une $A(-2, -1)$ con $B(3, 3)$ se prolonga hasta C. Sabiendo que $BC = 3AB$, hallar las coordenadas de C. *Sol.* (18, 15).

22. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices. Ind.: Supóngase que las coordenadas del vértice del ángulo recto son (0, 0) y las de los otros vértices $(a, 0)$ y $(0, b)$.

23. Demostrar que en los triángulos isósceles del Problema 6 dos de las medianas son de la misma longitud.

24. Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) $(3, 4), (1, -2)$; *c*) $(6, 0), (6, \sqrt{3})$; *e*) $(2, 4), (-2, 4)$;
b) $(-5, 3), (2, -3)$; *d*) $(1, 3), (7, 1)$; *f*) $(3, -2), (3, 5)$.

Sol. *a*) 3, *b*) $-\frac{6}{7}$, *c*) ∞, *d*) $-\frac{1}{3}$, *e*) 0, *f*) ∞.

25. Hallar las inclinaciones de las rectas que pasan por los puntos:

a) $(4, 6)$ y $(1, 3)$; *c*) $(2, 3)$ y $(1, 4)$; *e*) $(\sqrt{3}, 2)$ y $(0, 1)$;
b) $(2, \sqrt{3})$ y $(1, 0)$; *d*) $(3, -2)$ y $(3, 5)$; *f*) $(2, 4)$ y $(-2, 4)$.

Sol. *a*) $\theta = \text{tg}^{-1} 1 = 45°$; *c*) $\theta = \text{tg}^{-1} -1 = 135°$; *e*) $\theta = \text{tg}^{-1} 1/\sqrt{3} = 30°$;
b) $\theta = \text{tg}^{-1} \sqrt{3} = 60°$; *d*) $\theta = \text{tg}^{-1} \infty = 90°$; *f*) $\theta = \text{tg}^{-1} 0 = 0°$.

26. Aplicando el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los puntos siguientes son colineales.

a) $(2, 3), (-4, 7)$ y $(5, 8)$; *d*) $(0, 5), (5, 0)$ y $(6, -1)$;
b) $(4, 1), (5, -2)$ y $(6, -5)$; *e*) $(a, 0), (2a, -b)$ y $(-a, 2b)$;
c) $(-1, -4), (2, 5)$ y $(7, -2)$; *f*) $(-2, 1), (3, 2)$ y $(6, 3)$.

Sol. *a*) No, *b*) Sí, *c*) No, *d*) Sí, *e*) Sí, *f*) No.

27. Demostrar que el punto $(1, -2)$ está situado en la recta que pasa por los puntos $(-5, 1)$ y $(7, -5)$ y que equidista de ellos.

28. Aplicando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un triángulo rectángulo.

a) $(6, 5), (1, 3)$ y $(5, -7)$; *c*) $(2, 4), (4, 8)$ y $(6, 2)$;
b) $(3, 2), (5, -4)$ y $(1, -2)$; *d*) $(3, 4), (-2, -1)$ y $(4, 1)$.

29. Hallar los ángulos interiores de los triángulos cuyos vértices son:

a) $(3, 2), (5, -4)$ y $(1, -2)$; *Sol.* 45°, 45°, 90°.
b) $(4, 2), (0, 1)$ y $(6, -1)$; *Sol.* 109° 39,2′, 32° 28,3′, 37° 52,5′.
c) $(-3, -1), (4, 4)$ y $(-2, 3)$; *Sol.* 113° 29,9′, 40° 25,6′, 26° 4,5′.